Correction S1 B1 OBM

Exercice 1 : logique

Les questions sont indépendantes.

1. *Soit a et b deux réels. On considère les assertions :*

   P_1 : « $a = b$ », P_2 : « $a^2 = b^2$ », P_3 : « $a = -b$ », P_4 : « $(a-b)(a+b) = 0$ », P_5 : « $a = b$ ou $a = -b$ »

   et P_6 : « $a = 0$ ou $b = 0$ »

   (a) *Quelles sont les implications du type $P_1 \implies$ ..... vraies pour tous a et b réels ?*

   $P_1 \implies P_2$, $P_1 \implies P_4$ et $P_1 \implies P_5$. Bien sûr, $P_1 \implies P_1$

   (b) *Parmi les assertions P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui impliquent P_1 pour tous réels a et b.*

   Aucune

   (c) *Parmi les assertions P_1, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui impliquent P_2 pour tous réels a et b.*

   $P_1 \implies P_2$, $P_3 \implies P_2$, $P_4 \implies P_2$ et $P_5 \implies P_2$.

   (d) *Parmi les assertions P_1, P_3, P_4, P_5 et P_6, identifier celles qui sont équivalentes à P_2 pour tous réels a et b.*

   $P_4 \iff P_2$ et $P_5 \iff P_2$.

2. *Traduire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes en indiquant si elles sont vraies ou fausses et en justifiant.*

   (a) *« Le carré de tout réel est positif »*

   « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie car un carré est toujours positif.

   (b) *« Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré »*

   « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x > x^2$ » est vraie. Prenons $x = 0,1$. $x^2 = 0,01$ et $x > x^2$.

   (c) *« Il y a un réel égal au carré de tous les autres »*

   « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x = y^2$ » est fausse. Si x existe, on aurait par exemple $x = 2^2 = 4$ et $x = 3^2 = 9$ ce qui est absurde.

3. *On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ l'ensemble des nombres rationnels.*

   Soit l'assertion « (P) : $\forall\, (p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ (p < q \implies (\exists\, c \in \mathbb{Q},\ p < c < q))$ »

   (a) *Démontrer que l'assertion (P) est vraie par un raisonnement direct en prenant grand soin de votre rédaction.*

   Indice : on pourra penser à $\dfrac{p+q}{2}$

   Soit $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$. On suppose $p < q$. Posons $c = \dfrac{p+q}{2}$. Comme p et q sont rationnels, $c \in \mathbb{Q}$. De plus,

   $$p < q \implies p + p < p + q \implies p < \frac{p+q}{2} \text{ et } p < q \implies p + q < q + q \implies \frac{p+q}{2} < q$$

   Par conséquent, $p < c < q$. L'assertion est démontrée.

   (b) *Donner la négation de (P).*

   « $\exists\, (p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ (p < q) \wedge (\forall\, c \in \mathbb{Q},\ (p \geq c) \vee (c \geq q))$ »

4. *Soient* $A = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 5\}$ *et* $B = \{x \in \mathbb{Z}, (x-1)(x-5) \geq 0\}$. *On note* $\overline{B}$ *le complémentaire de* B *dans* $\mathbb{Z}$.

   (a) *Remplir les pointillés pour que la phrase mathématique soit correcte :*

   a) $\ldots\ldots \in A$, b) $\ldots\ldots\ldots \not\subset A \cup B$, c) $\ldots\ldots\ldots \in A \cap B$, d) $\ldots\ldots\ldots \subset \overline{B}$

   a) 5, b) $\{2\}$, c) 5, d) $\{2\}$

   (b) *De quel ensemble commun* A *et* B *sont-ils des sous-ensembles ?*

   A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}$.

   (c) *Montrer que* $A \subset B$. *Rédiger en suivant les règles de rédaction vues en séminaire.*

   Soit $x \in A$. On a $x \in \mathbb{Z}$ et $x \geq 5$. Ainsi, $x - 5 \geq 0$. De plus, si $x \geq 5$ alors $x \geq 1$. D'où, $x - 1 \geq 0$. Par conséquent $(x-1)(x-5) \geq 0$.

   Donc $x \in B$.

   (d) *A-t-on* $B \subset A$ *? Justifier.*

   Non. Prenons $x = 0$. On a $x \notin A$. Or, $(0-1)(0-5) = 5$ d'où $x \in B$. B n'est donc pas inclus dans A.

Exercice 2 : ensembles et fonctions 1

1. *Soient* F *et* G *deux ensembles et* $f : F \longrightarrow G$

   (a) *Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est injective de F vers G »*

   $$\forall\, (x, x') \in F^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$$

   (b) *Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est surjective de F vers G »*

   $$\forall\, y \in G,\ \exists\, x \in F,\ y = f(x)$$

2. *Soient* $E = \{2, 3, 4\}$. *On définit la fonction* f : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \text{card}(A) \end{array}$

   (a) *Donner* $\mathcal{P}(E)$

   $$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\{3,4\}, E\}$$

   (b) *Remplir ci-dessous le tableau de valeurs de la fonction* f *:*

A	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	E
$f(A)$	0	1	1	1	2	2	2	3

   (c) f *est-elle injective ? Justifier.*

   f n'est pas injective car $f(\{2\}) = f(\{3\}) = 1$ et $\{2\} \neq \{3\}$.

   (d) f *est-elle surjective ? Justifier.*

   f n'est pas surjective. $4 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathcal{P}(E)$ par exemple.

   (e) *Déterminer* $I \subset \mathcal{P}(E)$ *et* $J \subset \mathbb{N}$ *tels que* $f : I \longrightarrow J$ *soit injective, non surjective. (Les ensembles* I *et* J *doivent contenir au moins deux éléments).*

   On peut prendre par exemple $I = \{\{2\}, \{2,3\}, E\}$ et $J = \mathbb{N}$. f sera injective non surjective.

   (f) *Déterminer* $I' \subset \mathcal{P}(E)$ *et* $J' \subset \mathbb{N}$ *tels que* $f : I' \longrightarrow J'$ *soit surjective, non injective. (Les ensembles* I' *et* J' *doivent contenir au moins deux éléments).*

   On peut prendre $I' = \mathcal{P}(E)$ et $J' = \{0, 1, 2, 3\}$. f sera surjective, non injective.

Exercice 3 : ensembles et fonctions 2

1. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*
   (a) *Soit $A \subset E$. Donner la définition mathématique de $f(A)$.*

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\} = \{y \in F,\, \exists\, x \in A,\, y = f(x)\}$$

   (b) *Soit $B \subset F$. Donner la définition mathématique de $f^{-1}(B)$.*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\, f(x) \in B\}$$

2. *Application* 1. *On définit la fonction $f : [\![0, 10]\!] \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que*

$$\forall\, n \in [\![0, 10]\!],\ f(n) = n + 1 \text{ si } n \text{ pair et } 0 \text{ sinon}$$

   Donner $f(\{1, 2, 3\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

   $f(\{1, 2, 3\}) = \{0, 3\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

3. *Application 2 : compléter le tableau suivant.*

   N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon ! Bien sûr, la fonction ln *est la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et la fonction* cos *est $x \mapsto \cos(x)$.*

f	$\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\cos : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$	$]-\infty, \ln(\pi/2)]$	$[0, 1[$
$f^{-1}(\{0\})$	$\{1\}$	$\{-\pi/2, \pi/2\}$
$f^{-1}(\{-1\})$	$\{e^{-1}\}$	$\{-\pi, \pi\}$
$f^{-1}(\,]-\infty, 0])$	$]0, 1]$	$[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$

Exercice 4 : relations

Soit $E = [\![0, 50]\!]$.

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall\, (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\, A\,\mathcal{R}\,B \iff \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.

1. *Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est réflexive. Justifier.*

   $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\, A\mathcal{R}A$.

   Comme $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(A)$, on a $A\mathcal{R}A$. $\mathcal{R}$ est donc bien réflexive.

2. *Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est symétrique. Justifier.*

   $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall\, (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\, A\mathcal{R}B \implies B\mathcal{R}A$.

   Prenons $A = \{0\}$ et $B = \{0, 1\}$. On a $\text{Card}(A) = 1$ et $\text{Card}(B) = 2$. Ainsi, $A\mathcal{R}B$ mais B n'est pas en relation avec A. $\mathcal{R}$ n'est donc pas symétrique.

3. *Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est antisymétrique. Justifier.*

   $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall\, (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\, A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A \implies A = B$.

   Prenons $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$. On a $\text{Card}(A) = 1$ et $\text{Card}(B) = 1$. Ainsi, $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ mais $A \neq B$. $\mathcal{R}$ n'est donc pas antisymétrique.

4. *Après avoir rappelé la définition, dire si $\mathcal{R}$ est transitive. Justifier.*

   $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall (A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$, $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C \implies A\mathcal{R}C$.

   Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tel que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. On a $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ et $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(C)$. Ainsi, $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(C)$. D'où, $A\mathcal{R}C$. $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Exercice 5 : intégrales

Les questions sont indépendantes.

1. *Calculer directement avec une primitive :* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

   On reconnait presque la forme « $\dfrac{u'}{u^2}$ ». Il manque un 2 au numérateur, qu'il faut compenser.

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x^4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}$$

2. *Via une intégration par parties, calculer* $J = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx$. *Vous poserez clairement les fonctions u, u', v et v' et vous mettrez en évidence la formule.*

   On pose $u(x) = \arctan(x)$ et $v'(x) = 1$. Ainsi, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$. D'où,

$$I = \left[x\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

3. *Calculer* $K = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\ln(t)+t}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $x = \ln(t)$.

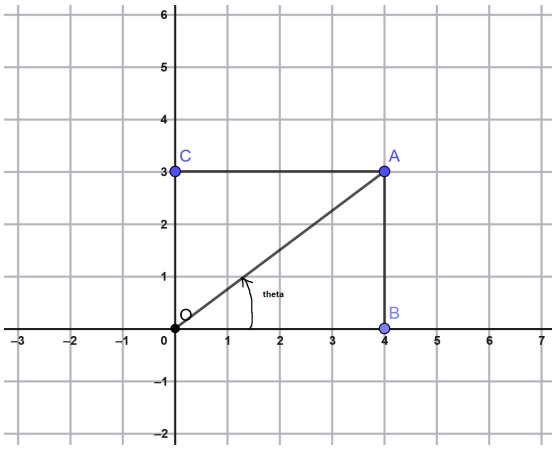
   $x = \ln(t) \iff t = e^x$. Ainsi, $\mathrm{d}t = (e^x)'\mathrm{d}x = e^x\mathrm{d}x$. De plus, si $t = 1$, $x = \ln(1) = 0$ et si $t = e$, $x = \ln(e) = 1$. Ainsi,

$$K = \int_0^1 \frac{1}{xe^x + e^x} e^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln(2)$$

Exercice 6 : nombres complexes

Partie 1 : questions de cours

On se place dans la plan complexe ci-dessous, où sont représentés trois points A d'affixe z_A, B d'affixe z_B et C d'affixe z_c ainsi que O l'origine du repère :



Remplacer les pointillés par une réponse correcte :

1. $z_A = 4+3i$, $z_C = 3i$, $z_B = 4$ *(expressions algébriques).*

2. *Le conjugué de z_A est $\overline{z_A} = 4 - 3i$ et celui de z_B est $\overline{z_B} = 4$ (notation et expression algébrique)*

3. *L'ensemble des nombres complexes se note* : $\mathbb{C}$

4. *Le module de z_A est noté $|z_A|$ et il est égal à $|z_A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (faire le calcul)*

5. *Que représente graphiquement le module de z_A* ? La distance OA.

6. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z_A (qu'on ne vous demande pas de déterminer explicitement).*

   On a, dans notre cas : $\cos(\theta) = \dfrac{4}{5}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{3}{5}$

7. *L'écriture exponentielle de z_A est (en fonction de θ)* : $z_A = 5e^{i\theta}$.

8. *Sur le dessin, indiquer graphiquement un argument de z_A*

Partie 2 : exercices types (Ils sont indépendants)

1. *Donner la forme algébrique de $z = i(6 - 2i) + (-3 - 2i)$*

$$z = 6i + 2 - 3 - 2i = -1 + 4i$$

2. *Soient $z_1 = -4 + 3i$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Donner $|z_1|$, $|z_2|$ et $|z_1 \times \overline{z_2}|$.*

$$|z_1| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5,\ |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2 \text{ et } |z_1 \times \overline{z_2}| = |z_1| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2| = 5 \times 2 = 10$$

3. *Donner la forme trigonométrique ou exponentielle de $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et z_2^3.*

   - $|z_1| = \sqrt{2}$ d'où, $z_1 = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ce qui identifie $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Donc $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   - $|z_2| = 2$ d'où, $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right)$ ce qui identifie $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$. Donc $z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
   - Ainsi, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$.
   - $z_2^3 = \left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i$.

4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $-z^2 - \sqrt{3}z - 1 = 0$.*

   On a $\Delta = 3 - 4 \times (-1) \times (-1) = -1$. Ainsi,

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3} + i}{-2}, \frac{\sqrt{3} - i}{-2}\right\} = \left\{\frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\right\}$$